L3/AP2 - Lexique de termes concernant les graphes

- **Accessible (arc , sommet)**
  Un sommet *y* est dit accessible à partir d'un sommet *x* s'il existe un *chemin* d'origine *x* et d'extrémité *y*.
  Un arc *a* est dit accessible à partir d'un sommet *x* si l'*origine* de l'arc *a* est accessible à partir de *x*.
- **Arborescence**
  Graphe faiblement connexe, sans cycle, tel qu'il existe un sommet (qu'on appelle *racine*) à partir duquel tout sommet est accessible.
- **Arbre**
  Graphe non orienté, connexe, sans circuit.
  Attention : voir la rubrique circuit (cas d'un graphe non orienté).
- **Arc** *(voir Graphe)*
  Un arc est un couple de *sommets* (*x*, *y*). *x* est appelé *origine* de l'arc, et *y* est appelé *extrémité*.
- **Arête**
  Dans un graphe *non orienté*, couple de sommets en relation.
  Une arête correspond à deux arcs, (*x*, *y*) et (*y*, *x*).
- **Boucle**
  On appelle boucle tout *arc* (ou toute *arête*) dont l'*origine* est identique à l'*extrémité*.
  Attention : ne pas confondre avec *circuit* : une boucle est un cas particulier de circuit, un circuit de *longueur* 1.
- **Chaîne**
  Une chaîne est une suite de sommets (x_0, x_1,... x_k), avec k >= 0, telle que pour tout i (0 < i <= k), (x_{i-1}, x_i) est un arc du graphe, ou (x_i, x_{i-1}) est un arc du graphe.
  La *longueur* de la chaîne est k.
  Les sommets x_0 et x_k sont les *extrémités* de la chaîne.
  Attention : ne pas confondre avec *chemin*.
- **Chemin**
  Un chemin est une suite de sommets (x_0, x_1,... x_k), avec k >= 0, telle que pour tout i (0 < i <= k), (x_{i-1}, x_i) est un arc du graphe.
  La *longueur* du chemin est k.
  Le sommet x_0 est l'*origine* du chemin, le sommet x_k est l'*extrémité* du chemin.
  Attention : ne pas confondre avec *chaîne*.
- **Circuit**
  Un circuit est un *chemin* de *longueur* non nulle dont l'*origine* est identique à l'*extrémité*.
  Étant donné un circuit (x_0, x_1,... x_{k-1}, x_0), tout chemin (x_i, x_{i+1},... x_{k-1}, x_0, x_1,... x_i) est aussi un circuit. En général, par commodité, on considère que toute cette famille de chemins constitue un seul et même circuit. Ainsi, on pourra parler du circuit [*a*, *b*, *c*, *a*] ou [*c*, *a*, *b*, *c*], indifféremment.
  Dans un graphe non orienté, toute arête (*x*,*y*) induit un circuit [*x*,*y*,*x*], ou [*y*,*x*,*y*]. Dans un graphe non orienté, on réserve (sauf mention contraire) le nom de circuit aux circuits de longueur *k* supérieure ou égale à 3, tels que pour tout i (0 <= i < k-1), x_i est distinct de x_{i+2}. C'est en particulier le cas dans la définition d'un *arbre*.
  Attention : ne pas confondre avec *boucle*, ni avec *cycle*.
- **Circuit élémentaire**
  Un circuit élémentaire est un circuit dont aucune sous-séquence n'est un circuit - c'est un circuit qui ne "contient" pas d'autre circuit.
- **Complet (graphe)**
  Un graphe tel que tout couple de *sommets* est relié est appelé graphe complet (la relation *R* égale *X* x *X*).
- **Connexe (graphe)**
  - Graphe fortement connexe
    Un graphe est fortement connexe si et seulement si, pour tout couple de *sommets x* et *y*, il existe un *chemin* d'*origine x* et d'*extrémité y*.
  - Graphe faiblement connexe
    Un graphe est faiblement connexe si et seulement si, pour tout couple de *sommets x* et *y*, il existe une *chaîne* d'*origine x* et d'*extrémité y*.

  Dans le cas d'un graphe *non orienté*, les deux propriétés ci-dessus sont équivalentes : on dit alors simplement que le graphe est connexe.
- **Cycle**
  Un cycle est une *chaîne* de *longueur* non nulle dont l'*origine* est identique à l'*extrémité*.
  Attention : ne pas confondre avec *boucle*, ni avec *circuit*.
- **Degré** d'un sommet
  Le degré d'un sommet *x* est le nombre d'*arcs* (ou d'*arêtes*, dans le cas d'un graphe *non orienté*) dont *x* est origine ou extrémité.
  Le demi-degré extérieur est le nombre d' *arcs* dont *x* est origine, et le demi-degré intérieur est le nombre d'*arcs* dont *x* est extrémité.
  Le degré est la somme des demi-degrés extérieur et intérieur.
- **Degré** d'un graphe
  Le degré d'un graphe est le **maximum** des *degrés* de ses *sommets*.
- **Demi-degré** *(voir degré d'un sommet)*
- **Étiqueté (graphe)**
  - Graphe aux sommets étiquetés
    Un graphe aux sommets étiquetés est un triplet (*X*, *R*, *f*) où (*X*, *R*) est un graphe, et *f* est une application de l'ensemble des sommets *X* dans un ensemble quelconque *E*, appelé ensemble des étiquettes.
    Pour tout sommet *x*, *f(x)* est appelé étiquette de *x*.
  - Graphe aux arcs (ou arêtes) étiquetés
    Un graphe aux arcs étiquetés est un triplet (*X*, *R*, *g*) où (*X*, *R*) est un graphe, et *g* est une application de l'ensemble des arcs *R* dans un ensemble quelconque *F*, appelé ensemble des étiquettes.
    Pour tout arc *a*, *g(a)* est appelé étiquette de *a*.

  La définition d'un graphe aux sommets **et** aux arcs étiquetés se déduit directement des deux définitions ci-dessus.
  REMARQUE : les applications *f* et *g* ne sont en général ni injectives, ni surjectives.
- **Étiquette** *(voir graphe étiqueté)*
- **Extrémité**
  S'applique à un *arc*, ou à un *chemin (voir ces mots)*.
- **Fils** (dans une arborescence) *(voir successeur)*
- **Graphe**
  On appelle graphe un couple *G* = (*X*,*R*), où *X* est un ensemble quelconque, appelé ensemble des *sommets*, et *R* une relation binaire définie sur *X* (c'est-à-dire un sous-ensemble du produit cartésien *X* x *X*), appelée ensemble des *arcs*. Si *R* est une relation symétrique, le graphe est dit *non orienté*.
- **Longueur** d'un chemin
  La longueur d'un *chemin* est le nombre d'*arcs* (ou d'*arêtes*) qui composent ce chemin, c'est-à-dire le nombre de *sommets* **moins un**.
  Propriété. Pour tout sommet *x* du graphe, il existe un chemin de longueur 0, le chemin [*x*].
- **Non orienté** (graphe)
  Un graphe *G* = (*X*, *R*) est non orienté si la relation *R* est symétrique. Dans un graphe non orienté, on n'utilise pas, en général, le terme *arc* : un couple de *sommets* en relation est appelé *arête*, et correspond à **deux** *arcs*.
  TRÉS IMPORTANT :
  Dans un graphe non orienté, les notions de *chaîne* et de *chemin* sont équivalentes, ainsi, par voie de conséquence, que les notions de *cycle* et de *circuit*, et celles de *faiblement connexe* et de *fortement connexe*.
- **Origine**
  S'applique à un *arc*, ou à un *chemin (voir ces mots)*.
- **Sommet** *(voir graphe)*
- **Sous-graphe** d'un graphe *G*, engendré par un ensemble *S* de sommets de *G*
  L'ensemble de tous les sommets *accessibles* dans *G* à partir d'un sommet de *S*, et tous les arcs de *G* reliant ces sommets, définissent un graphe, appelé sous-graphe engendré par *S*.
  Cas particulier : si *S* a un seul élément *x*, on parle de sous-graphe engendré par *x*.
- **Successeur**
  On appelle successeur d'un *sommet x* tout *sommet y* tel que (*x*, *y*) est un *arc* du graphe.
  Les successeurs d'un *sommet* dans une arborescence sont souvent appelés *fils*.
  Dans un graphe non orienté, on utilise aussi le mot *voisin*, qui correspond mieux que successeur au cas d'une relation symétrique.
- **Voisin** d'un sommet *(voir successeur)*