

Graphes

Notations et concepts

Jean-Marc.Vincent@univ-grenoble-alpes.fr¹

¹Laboratoire LIG
Équipe-Projet INRIA POLARIS
Université Grenoble-Alpes

Algorithmique et Modélisation
L3-INFO

I. GRAPHE ORIENTÉ

II. GRAPHE NON ORIENTÉ

III. ARBRE

IV. STRUCTURE DE DONNÉES



RELATION

Sommets d'un graphe

$\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ ensemble fini de n **sommets**

RELATION

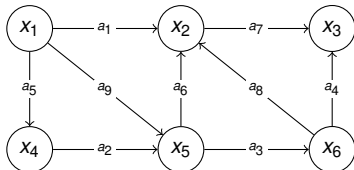
Sommets d'un graphe

$\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ ensemble fini de n **sommets**

Un **graphe** \mathcal{G} est une relation \mathcal{R} sur \mathcal{X} , c'est à dire une partie de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$

Représentation par un ensemble d'arcs :

$\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$ ensemble fini de m **arcs**, couples de sommets



$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_9\}$ $a_3 = (x_5, x_6)$

$\mathcal{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{A})$

GRAPHE ORIENTÉ

Voisins

$a = (x, y) \in \mathcal{A}$ couple de sommets

- ▶ x est l' **origine** de l'arc a
- ▶ y est l' **extrémité** de l'arc a
- ▶ y est un **successeur** de x
- ▶ x est un **prédécesseur** de y

Degré d'un sommet

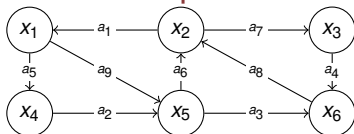
- ▶ Le **demi-degré extérieur (ou sortant)** de x , d_x^+ , est le nombre d'arcs de la forme (x, y) ,
- ▶ Le **demi-degré intérieur (ou entrant)** de x , d_x^- , est le nombre d'arcs de la forme (y, x) ,
- ▶ Le **degré** est la somme des demi-degrés extérieur et intérieur.

Cheminelements

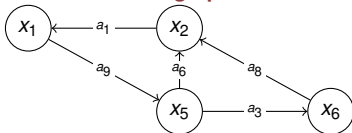
- ▶ Un **chemin** est une suite de sommets $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \dots, x_k)$, avec $k \geq 0$, telle que pour tout $0 < i \leq k$, $(x_{i-1}, x_i) \in \mathcal{A}$
- ▶ La **longueur** du chemin \mathcal{C} est k .
- ▶ Le sommet x_0 est l' **origine** du chemin \mathcal{C} , le sommet x_k est l' **extrémité** du chemin.
- ▶ Un chemin est **élémentaire** s'il ne contient pas deux fois le même sommet
- ▶ Un **circuit** est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont égales
- ▶ Un graphe est **connexe** ssi pour tout x, y il existe un chemin de x à y (noté $x \rightsquigarrow y$)

MORCEAUX DE GRAPHS

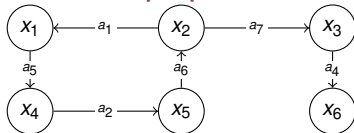
Graphe



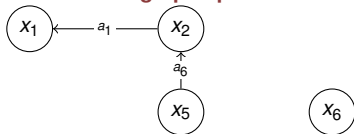
Sous-graphe



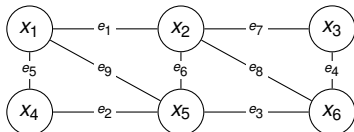
Graphe partiel



Sous-graphe partiel



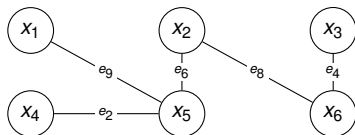
GRAPHE NON ORIENTÉ



\mathcal{E} ensemble d'**arêtes** : paires de sommets (\mathcal{E} edges en anglais)
 \mathcal{A} représente une relation symétrique

- ▶ origine, extrémité \mapsto **extrémités**
- ▶ prédécesseurs, successeurs \mapsto **voisins**
- ▶ chemin \mapsto **chaîne**
- ▶ circuit \mapsto **cycle**

ARBRE



Un **arbre** est un graphe non-orienté connexe et sans cycle

Un arbre **couvrant** d'un graphe non-orienté \mathcal{G} est un graphe partiel de \mathcal{G} qui est un arbre

Définitions équivalentes d'un arbre \mathcal{G} ayant n sommets

\mathcal{G} est

- ▶ connexe et sans cycle
- ▶ connexe ayant $n - 1$ arêtes
- ▶ sans cycle ayant $n - 1$ arêtes
- ▶ connexe ayant minimum d'arêtes
- ▶ sans cycle ayant un maximum d'arêtes
- ▶ Pour tout couple de sommets (x, y) , il existe un unique chemin $x \rightsquigarrow y$

STRUCTURE DE DONNÉES

Structure explicite

- ▶ Matrice d'adjacence
- ▶ Listes de voisins, listes de successeurs
- ▶ Liste d'arcs (couples) ou d'arêtes (paires)
- ▶ ...

Structure implicite

- ▶ espace des sommets non définis a priori
- ▶ Fonctions de voisinage
- ▶ structure implicite (père dans un tas ou dans un union-find)
- ▶ ...