

UE ALGO5 — TD2 — Séance 11 : Union-Find

Objectifs

À la fin de cette séance, vous devriez être capable de :

- choisir des structures de données adaptées aux spécifications ;
- calculer des complexités en moyenne, pondérées, du meilleur et pire cas.

Exercice 1.

Soit un ensemble $E = \{0, \dots, n - 1\}$. On souhaite implémenter une structure permettant de gérer des *partitions* de E .

Rappel : L'ensemble d'ensembles $\{E_1, \dots, E_k\}$ est une partition de E si :

- aucun sous-ensemble n'est vide : $E_i \neq \emptyset$
- E est recouvert par les sous-ensembles : $\bigcup_i E_i = E$
- les sous-ensembles sont deux à deux disjoints : $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$.

On spécifie un type `id` permettant d'identifier les sous-ensembles, ainsi que les primitives suivantes :

`id` : type abstrait

Initialiser

{Après l'appel à Initialiser, la structure contient la partition P où chaque élément de E est l'élément unique d'un ensemble de P : $P = \{\{0\}, \dots, \{n - 1\}\}$ }

Find : entier \rightarrow id

{Find(x) renvoie l'identifiant du sous-ensemble auquel appartient x . Find(x)=Find(y) ssi x et y appartiennent au même sous-ensemble. }

Union(données x, y : entiers)

{ Union(x, y) réalise l'union des deux sous-ensembles auxquels appartiennent x et y . Après cet appel, Find(x)=Find(y) }

On souhaite implémenter de manière efficace les primitives Union et Find. Pour cela, on utilise un tableau Parent de n entiers représentant une *forêt*, dans laquelle chaque *arbre* contient les éléments d'un même sous-ensemble. Parent(x) est défini comme étant le parent de x ; un sous-ensemble est représenté par l'élément à la racine de l'arbre.

Parent : tableau sur $[0..n-1]$ d'entiers sur $0..n-1$

- Q 1. Dessiner la structure Parent et les arbres correspondants à l'initialisation, puis après plusieurs appels à Union.
- Q 2. Réaliser l'opération d'initialisation, puis les primitives Union et Find. Quel est le coût de ces deux opérations ?
- Q 3. Proposer puis implémenter une méthode permettant d'améliorer le coût des deux opérations.