TD1.5 – Preuves de correction et de terminaison

Objectifs

À la fin de cette séance, vous devriez être capable de :

— concevoir et exploiter un invariant de boucle ;

— donner un variant de boucle afin de prouver la terminaison d'un algorithme simple ;

— spécifier un algorithme simple et démontrer sa correction à l'aide d'un invariant.

Exercice 1 : Encore un tour de cartes

Observez attentivement le tour de cartes proposé par votre enseignant.

1. Essayez de découvrir le « truc » et de l'exprimer (informellement).
   Vérifiez que votre idée est correcte en essayant de réaliser le tour vous-mêmes.
   Si vous n'y arrivez pas, vous pouvez consulter l'algorithme suivant (mais pas avant d'avoir cherché !) :

```
Choisir arbitrairement une valeur (7,8,9,10,V,D,R,A) pour chacun des 8 paquets.
Piocher une carte dans un des paquets, lui aussi choisi arbitrairement.
while ... ? ... do
    Piocher une carte dans le paquet correspondant à la valeur de la dernière carte
    reçue.
Compter combien il reste de cartes dans chaque paquet.
En déduire combien il reste de cartes de chaque valeur sur la table.
```

2. Précisez ce qui se passe lorsque le tour se termine : quelle est la postcondition de l'algorithme (et donc comment le magicien sait-il ce qui reste sur la table) ?
3. Exprimez précisément un invariant du tour de magie.
4. Démontrez que votre invariant en est effectivement un.
5. Votre invariant est-il vérifié lorsque le tour commence ? (c'est-à-dire après avoir pioché la toute première carte)

   Sinon, reprenez à l'étape 3 et affinez votre invariant pour tenir compte de la situation initiale.
6. À quel moment le magicien a-t-il intérêt à arrêter de piocher des cartes pour que le tour de magie soit plus simple à réaliser ?

Exercice 2 : Preuve d'algorithme

On s'intéresse à l'algorithme suivant :

Data : un entier n
Result : c est une valeur approchée de la racine carrée de n
$c := 0$
$s := 1$
while $s \leq n$ **do**
    $c := c + 1$
    $s := s + 2 * c + 1$

1. Écrire une spécification de l'algorithme (précondition, postcondition) plus précise que ce qui est décrit ici.
2. Démontrer qu'il se termine à l'aide d'un variant de boucle bien choisi.
3. Démontrer que $(c+1)^2 = s$ est un invariant de la boucle.
4. Quelle partie de la postcondition pouvez-vous démontrer à l'aide de cet invariant ?
5. Quel autre invariant faut-il étudier pour établir complètement la correction de cet algorithme ?

Membres du groupe et responsabilités

	Écrire les algorithmes sans ambiguïtés en respectant les primitives autorisées	Gérer le temps
	Évaluer l'efficacité des algorithmes	Réguler les prises de parole
	Rechercher des cas problématiques Déterminer des invariants	S'assurer que tous comprennent et sont en accord avec le rendu
	Représenter schématiquement les structures de données et leur traitement	Rédiger le rendu

Exercice 1 : Encore un tour de cartes

- Exprimez précisément l'invariant du tour de magie.
- Précisez ce qui se passe lorsque le tour se termine.
  - quelle postcondition l'invariant permet-il de déduire (et donc que sait le magicien) ?
  - à quel moment le magicien a-t-il intérêt à arrêter de piocher des cartes ?