TD1.3 – Analyse en moyenne et preuve

Objectifs

À la fin de cette séance, vous devriez être capable de :

— concevoir un invariant de boucle

— faire une analyse en moyenne d'agorithmes simples sous des hypothèses probabilistes standard.

Exercice 1 : Encore un tour de cartes

Observez attentivement le tour de cartes proposé par votre enseignant.

1. Essayez de découvrir le « truc » et de l'exprimer (informellement).
   Vérifiez que votre idée est correcte en essayant de réaliser le tour vous-mêmes.
   Si vous n'y arrivez pas, vous pouvez consulter l'algorithme suivant (mais pas avant d'avoir cherché !) :

```
Choisir arbitrairement une valeur (7,8,9,10,V,D,R,A) pour chacun des 8 paquets.
Piocher une carte dans un des paquets, lui aussi choisi arbitrairement.
while ... ? ... do
    Piocher une carte dans le paquet correspondant à la valeur de la dernière carte
    reçue.
Compter combien il reste de cartes dans chaque paquet.
En déduire combien il reste de cartes de chaque valeur sur la table.
```

2. Précisez ce qui se passe lorsque le tour se termine :
   — quelle est la postcondition de l'algorithme (et donc comment le magicien sait-il ce qui reste sur la table) ?
   — à quel moment le magicien a-t-il intérêt à arrêter de piocher des cartes pour que cette postcondition soit facile à exploiter ?
3. Exprimez précisément un invariant du tour de magie.
4. Démontrez que votre invariant en est effectivement un.
5. Votre invariant est-il vérifié lorsque le tour commence ?
   Permet-il de déduire la postcondition que vous avez élaborée à la question 2 ?

   Sinon, reprenez à l'étape 3...

Exercice 2 : Autres exercices de calcul de coût

1. (1) i := 1
   (2) tant que i <= n etpuis T[i] > a faire
   (3) Schtroumpfer()
   (4) i := i+1

   Evaluer le nombre de schtroumpfages exécutés par cet algorithme dans les cas favorables, défavorables et en moyenne, en prenant pour hypothèse que les différents tests $T[i] > a$ soient indépendants, et que la probabilité que chacun soit *vrai* est 1/2.

2. Mêmes questions pour l'algorithme :
   (1) tant que random > 1/2 faire
   (2) Schtroumpfer()

3. On suppose pour toute cette question que l'élément v est présent exactement une fois dans le tableau T. L'opération rand(1,n) tire un entier uniformément dans l'intervalle $[1, n]$.
   (1) i := rand(1,n)
   (2) tant que $T[i] \neq v$ faire
   (3) i := rand(1,n)

   Evaluer le nombre d'opérations exécutées par cet algorithme :
   — Considérer d'abord les cas favorables (coût minimal) et défavorables (coût maximal).
   — Faire l'analyse en moyenne, en prenant pour hypothèse que la probabilité pour que l'élément v soit à l'indice i est $1/n$.

4. Mêmes questions pour l'algorithme :
   (1) n := 1
   (2) tant que random <= $1/n$ faire
   (3) n := n+1

Membres du groupe

—
—
—
—

Exercice 1 : Encore un tour de cartes

- Exprimez précisément l'invariant du tour de magie.
- Précisez ce qui se passe lorsque le tour se termine.
  - quelle postcondition l'invariant permet-il de déduire (et donc que sait le magicien) ?
  - à quel moment le magicien a-t-il intérêt à arrêter de piocher des cartes ?